División de Polinomios

Como la división es la operación inversa de la multiplicación, el cociente de dos polinomios es un algoritmo mediante el cual efectuamos la división entera de un polinomio $A(x)$, el DIVIDENDO, entre otro polinomio $B(x)$, el DIVISOR, para encontrar dos polinomios, uno llamado COCIENTE, $Q(x)$, y otro denominado RESTO, $R(x)$, que verifican:

$$\boxed{A(x) = B(x)\cdot Q(x) + R(x)}$$

Si $R(x)=0 \Rightarrow$ División EXACTA

$A(x) = B(x)\cdot Q(x)$

$A(x)$ es múltiplo de $B(x)$

$$\begin{array}{r|l} \overbrace{A(x)}^{\text{DIVIDENDO}} & \overbrace{B(x)}^{\text{DIVISOR}} \\ \cline{2-2} \underbrace{R(x)}_{\text{RESTO}} & \underbrace{Q(x)}_{\text{COCIENTE}} \end{array}$$

Si $R(x)\neq 0 \Rightarrow$ División ENTERA

$$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

REGLAS:

1) El grado del DIVIDENDO debe ser **mayor o igual** al grado del DIVISOR
2) El grado del COCIENTE es igual al grado del DIVIDENDO **menos** el grado del DIVISOR
3) **La división finaliza** cuando el grado del RESTO es **estrictamente menor** al grado del COCIENTE

OBSERVACIONES:

a) El DIVIDENDO y el DIVISOR deben estar **ordenados** y en orden **descendente**
b) Al menos el DIVIDENDO debe estar **completo**, si no es así colocamos ceros o espacios en blanco.
c) Si la división entre los coeficientes de dos términos no es exacta, ésta se expresa en forma de fracción.
d) Cuando en una expresión polinómica se considera una variable como principal, las demás variables actúan como coeficientes.
e) El método es análogo al de la división de números enteros.

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
\cancel{+16x^4} & -4x^3 & -8x^2 & +2x & -15 & +2x^2 & +x & -1 \\ \cline{6-8}
\cancel{-16x^2} & -8x^3 & +8x^2 & & & +8x^2 & -6x & +3 \\ \cline{1-3}
& \cancel{-12x^3} & & +2x & & & & \\
& \cancel{+12x^3} & +6x^2 & -6x & & & & \\ \cline{2-4}
& & \cancel{+6x^2} & -4x & -15 & & & \\
& & \cancel{-6x^2} & -3x & +3 & & & \\ \cline{3-5}
& & & -7x & -12 & & &
\end{array}$$

$Q(x) = +8x^2 - 6x + 3$

$R(x) = -7x - 12$

$$\frac{16x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 2x - 15}{2x^2 + x - 1} = \left(8x^2 - 6x + 3\right) + \frac{-7x-12}{2x^2+x-1}$$

$$\begin{array}{rrr|rr}
\cancel{-14x^2} & +71x & +33 & -7x & -3 \\ \cline{4-5}
\cancel{+14x^2} & +6x & & +2x & -11 \\ \cline{1-2}
& \cancel{+77x} & +33 & & \\
& \cancel{-77x} & -33 & & \\ \cline{2-3}
& & 0 & &
\end{array}$$

$Q(x) = 2x - 11$

$R(x) = 0$

$$-14x^2 + 71x + 33 = (7x+3)(11-2x)$$

Ejemplos

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
\cancel{+4x^4} & +2x^3 & -2x^2 & +9x & +5 & -2x^3 & +x & -5 \\ \cline{6-8}
\cancel{-4x^4} & & +2x^2 & -10x & & & -2x & -1 \\ \cline{1-4}
& \cancel{+2x^3} & & \cancel{-x} & \cancel{+5} & & & \\
& \cancel{-2x^3} & & \cancel{+x} & \cancel{-5} & & & \\ \cline{2-5}
& & & & 0 & & &
\end{array}$$

$Q(x) = -2x - 1$

$R(x) = 0 \to$ *División Exacta*

$$4x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 9x + 5 = \left(-2x^3 + x + 5\right)\cdot\left(-2x-1\right)$$

$$\begin{array}{rrrrrr|rrr}
\cancel{+x^5} & \cancel{-3x^4} & & +9x^2 & +7x & -4 & +x^2 & -3x & +2 \\ \cline{7-9}
\cancel{-x^5} & \cancel{+3x^4} & -2x^3 & & & & +x^3 & -2x & +3 \\ \cline{1-3}
& & \cancel{-2x^3} & +9x^2 & +7x & & & & \\
& & \cancel{+2x^2} & -6x^2 & +4x & & & & \\ \cline{3-5}
& & & \cancel{+3x^2} & +11x & -4 & & & \\
& & & \cancel{-3x^2} & +9x & -6 & & & \\ \cline{4-6}
& & & & +20x & -10 & & &
\end{array}$$

$Q(x) = x^3 - 2x + 3$

$R(x) = 20x - 10$

$$\frac{x^5 - 3x^4 + 9x^2 + 7x - 4}{x^2 - 3x + 2} = \left(x^3 - 2x + 3\right) + \frac{20x-10}{x^2-3x+2}$$

$$\begin{array}{rrrrrr|rrrr}
\cancel{+6x^5} & +5x^4 & +4x^3 & -9x^2 & -8x & +10 & +2x^2 & -3x & +1 & \\ \cline{7-10}
\cancel{-6x^3} & +9x^4 & -3x^3 & & & & +3x^3 & +7x^2 & +11x & +\frac{17}{2} \\ \cline{1-3}
& \cancel{+14x^4} & +x^3 & -9x^2 & & & & & & \\
& \cancel{-14x^4} & +21x^3 & -7x^2 & & & & & & \\ \cline{2-4}
& & \cancel{+22x^3} & -16x^2 & -8x & & & & & \\
& & \cancel{-22x^3} & +33x^2 & -11x & & & & & \\ \cline{3-5}
& & & \cancel{+17x^2} & -19x & +10 & & & & \\
& & & \cancel{-17x^2} & +\frac{51}{2}x & -\frac{17}{2} & & & & \\ \cline{4-6}
& & & & +\frac{13}{2}x & +\frac{3}{2} & & & &
\end{array}$$

$Q(x) = 3x^3 + 7x^2 + 11x + \frac{17}{2}$

$R(x) = \frac{13}{2}x + \frac{3}{2}$

$$\begin{array}{rrrrr|rrrr}
\cancel{+2x^4} & -x^3 & & +7x & -3 & +2x & +3 & & \\ \cline{6-9}
\cancel{-2x^4} & -3x^3 & & & & +x^3 & -2x^2 & +3x & -1 \\ \cline{1-2}
& \cancel{-4x^3} & & & & & & & \\
& \cancel{+4x^3} & +6x^2 & & & & & & \\ \cline{2-3}
& & \cancel{+6x^2} & +7x & & & & & \\
& & \cancel{-6x^2} & -9x & & & & & \\ \cline{3-4}
& & & \cancel{-2x} & -3 & & & & \\
& & & \cancel{+2x} & +3 & & & & \\ \cline{4-5}
& & & & 0 & & & &
\end{array}$$

$Q(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

$R(x) = 0$