Ecuaciones EXPONENCIALES

Es aquella en la que aparecen potencias con una o más variables (o incógnitas) en el exponente (o exponentes).

Por ej.: $2^x = 7$; $5^x = 125$; $\sqrt[3]{9^{4x}} = 1$; $2^{x+1} - 2^{3x} + 1 = 0$

En general, de una otra manera, una ecuación exponencial se puede reducir a una ecuación de la forma $a^x = b$, donde a y b son números reales mayores que cero.

La función exponencial f dada por $f(x) = a^x$ $donde\ 0 < a < 1\ ó\ a > 1$ es biyectiva, por tanto, se satisfacen las condiciones equivalentes siguientes para el par de números reales x_1 y x_2

1) $si\ x_1 \neq x_2,\ entonces\ a^{x_1} \neq a^{x_2}$

2) $si\ a^{x_1} = a^{x_2},\ entonces\ x_1 = x_2$

Luego la resolución de ecuaciones exponenciales se basa en la siguiente propiedad:

> Dos potencias con una misma base positiva y distinta de la unidad son iguales si, y sólo si, son iguales sus exponentes.
>
> *p.ej.* $Si\ 2^a = 2^b\ \ entonces\ \ a = b$

Aprovechando esta propiedad, la ecuación $a^x = b$ donde $a > 0,\ a \neq 1, b > 0$ debe resolverse así: $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$

OBSERVACIONES:

— Una potencia de base positiva nunca toma un valor negativo

— Una igualdad de dos potencias con distinta base positiva sólo se verifica para un exponente igual a cero.

$$Si\ a^y = b^y\ \ entonces\ \ y = 0$$

— No hay un procedimiento general para resolver ecuaciones exponenciales, pero sí que es conveniente conocer bien y aplicar las propiedades de las potencias, de las raíces y, en su caso, de los logaritmos, además de saber factorizar.

> *En general, para resolver una ecuación exponencial, es habitual tomar logaritmos (con base la más conveniente):*
>
> 1. Aislamos la expresión exponencial en un lado de la ecuación
> 2. Tomamos logaritmos en cada miembro y usamos las propiedades de los logaritmos para "bajar x" del exponente
> 3. Despejamos la variable y calculamos su valor

Por tanto, algunos tipos elementales de ecuaciones exponenciales, se pueden resolver si utilizamos una de estas estrategias:

- ✓ **Conseguir una igualdad de exponenciales de la misma base**: escribimos los dos miembros de la ecuación como potencias de la misma base y así podemos igualar los exponentes.

  $$5^{2x} = 5^6 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = 3$$

- ✓ **Tomar logaritmos**: aplicamos logaritmos a ambos miembros, (después de dejar un término en cada lado de la igualdad) y despejamos la incógnita, por último, empleamos la calculadora para hallar un valor aproximado de x .

  $$15^{x-1} = 3^x \rightarrow x = \frac{\log 15}{\log 5} \rightarrow x \approx 1.682606194$$

- ✓ **Utilizar un cambio de variable**: realizamos un cambio de variable para reducir la ecuación a otra ecuación algebraica de 1º, 2º,…

Otros métodos pueden ser:

- Sacar factor común una potencia (realizamos cambios convenientes hasta conseguir potencias comunes).
- Aplicar suma de términos de progresión geométrica.
- Comprobar si las bases son números positivos inversos entre sí. etc…

Ejemplos previos:

- Reduciendo ambos miembros a una misma base

$$\begin{aligned} 2^{x+5} &= 8^{x-1} \\ 2^{x+5} &= 2^{3(x-1)} \\ 2^{x+5} &= 2^{3x-3} \\ x+5 &= 3x-3 \\ -2x &= -8 \\ \therefore\ x &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0.1^{x+4} &= \sqrt[5]{1000} \\ \left(\frac{1}{10}\right)^{x+4} &= 10^{\frac{3}{5}} \\ 10^{-x-4} &= 10^{\frac{3}{5}} \\ -x-4 &= \frac{3}{5} \\ \therefore\ x &= -\frac{23}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4^{x-1}}{2^{x+2}} &= 128 \\ 2^{2(x-1)} &= 2^7 \cdot 2^{x+2} \\ 2^{2x-2} &= 2^{x+9} \\ 2x-2 &= x+9 \\ \therefore\ x &= 11 \end{aligned}$$

- Sacando una potencia como factor común

$$\begin{aligned} 5^{2x+1} - 3\cdot 5^{2x-1} &= 550 \\ 5\cdot 5^{2x} - \frac{3}{5}\cdot 5^{2x} &= 550 \\ 5^{2x}\left(5 - \frac{3}{5}\right) &= 550 \\ 5^{2x} &= 550\cdot\frac{5}{22} \\ 5^{2x} = 5^3 &\Leftrightarrow 2x = 3 \\ \therefore\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} &= 117 \\ 3\cdot 3^x + 3^x + \frac{1}{3}\cdot 3^x &= 117 \\ 3^x\left(3 + 1 + \frac{1}{3}\right) &= 117 \\ 3^x &= 117\cdot\frac{3}{13} \\ 3^x &= 3^3 \\ \therefore\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4^x + 4^{x-1} + 4^{x-2} &= 336 \\ 4^x\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) &= 336 \\ 4^x &= 336\cdot\frac{16}{21} \\ 4^x &= 4^4 \\ \therefore\ x &= 4 \end{aligned}$$

- Utilizando un cambio de variable

$$\begin{aligned} 9^x - 7\cdot 3^x - 18 &= 0 \\ 3^{2x} - 7\cdot 3^x - 18 &= 0 \\ 3^x = t &\ \ > 0 \\ t^2 - 7t - 18 &= 0 \\ t = \frac{7 \pm 11}{2} &= \begin{cases} t_1 = 9 \\ t_2 = -2 \end{cases} \\ 3^x = 9 &\Rightarrow \therefore\ x = 2 \\ 3^x = -2 &\Rightarrow \therefore\ NO \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4^x - 2^x &= 2 \\ 2^{2x} - 2^x &= 2 \\ 2^x = t &\ \ > 0 \\ t^2 - t - 2 &= 0 \\ t = \frac{1 \pm 3}{2} &= \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = -1 \end{cases} \\ 2^x = 2 &\Rightarrow \therefore\ x = 1 \\ 2^x = -1 &\Rightarrow \therefore\ NO \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{2x+1} - 3\cdot 2^x + 1 &= 0 \\ 2\cdot(2^x)^2 - 3\cdot 2^x + 1 &= 0 \\ 2^x = t &\ \ > 0 \\ 2t^2 - 3t + 1 &= 0 \\ t = \frac{3 \pm 1}{4} &= \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 1/2 \end{cases} \\ 2^x = 1 &\Rightarrow \therefore\ x = 0 \\ 2^x = \frac{1}{2} &\Rightarrow \therefore\ x = -1 \end{aligned}$$

- Tomando logaritmos

Ecuaciones de la forma: $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$

Donde $a > 0, a \neq 1$ y $b > 0$, puede resolverse por logaritmación de ambos miembros. Esto es posible puesto que ambos miembros de la ecuación son positivos.

$$\begin{aligned} 5^{2x-1} &= 7^{3-x} \\ \log 5^{2x-1} &= \log 7^{3-x} \\ (2x-1)\log 5 &= (3-x)\log 7 \\ 2x\log 5 - \log 5 &= 3\log 7 - x\log 7 \\ x(2\log 5 + \log 7) &= 3\log 7 + \log 5 \\ x = \frac{3\log 7 + \log 5}{2\log 5 + \log 7} &= \frac{\log 1715}{\log 175} \\ \therefore\ x &\approx 1.4419 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^{x-1} &= 2^x \\ \log 3^{x-1} &= \log 2^x \\ (x-1)\log 3 &= x\log 2 \\ x\log 3 - x\log 2 &= \log 3 \\ x(\log 3 - \log 2) &= \log 3 \\ x = \frac{\log 3}{\log 3 - \log 2} &= \frac{\log 3}{\log(3/2)} \\ \therefore\ x &\approx 2.7095 \end{aligned}$$