

FUNCIÓN EXPONENCIAL

Estamos habituados a ver funciones que contienen potencias constantes de la variable independiente, como por ejemplo estas:

$$f(x) = x^2 ; f(x) = x^{-1} ; f(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

Si intercambiamos los papeles, es decir, elevando una constante a potencias variables, obtenemos una importante clase de funciones llamadas funciones exponenciales, como por ejemplo:

$$f(x) = 10^{-x} ; f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x ; f(x) = 5^{2x} \dots$$

Si a es un número real positivo y x es cualquier número real, siempre está definido el número a^x . La función $f(x) = \exp_a(x) = a^x$ se llama función exponencial porque la variable independiente está en el exponente.

Algunas aplicaciones de la función exponencial

Es la función con más presencia en los fenómenos observables. Así presentan comportamiento exponencial: la reproducción de una colonia de bacterias, la desintegración de una sustancia radiactiva, algunos crecimientos demográficos, la capitalización de una cantidad colocada a interés compuesto, la inflación, etc...

Por tanto la función exponencial es muy importante en matemáticas y tiene gran aplicación en campos muy diversos como la economía, administración, biología, química, física e ingeniería.

Ampliación del concepto de potencia

- Base real y exponente entero, $(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}}$,

Si a es un número real cualquiera y n un número entero se define

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n-\text{veces}} ; a^1 = a ; a^0 = 1 ; a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \forall a \neq 0$$

Con estas propiedades:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
 - $a^m / a^n = a^{m-n}$
 - $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
 - $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
 - $(a/b)^n = a^n / b^n$
- donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{Z}$

- Base real positiva y exponente racional, $(\mathbb{R}^+)^{\mathbb{Q}}$,

Si a es un número real positivo y m/n un número racional,

$$\text{Si } a \in \mathbb{R}^+ \text{ y } \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \text{ con } n > 0, \text{ entonces } a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Además de cumplir las 5 propiedades anteriores también verifican

- Si $a > 1$ y $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$ entonces $a^{\frac{m}{n}} > 1$
- Si $0 < a < 1$ y $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$ entonces $0 < a^{\frac{m}{n}} < 1$

- Base real positiva y exponente real, $(\mathbb{R}^+)^{\mathbb{R}}$,

Si a es un número real positivo y r es cualquier número real, se define la potencia a^r usando las aproximaciones racionales de los exponentes irracionales y utilizando el concepto de límite.

Ejemplo: $2^x \rightarrow 2^\pi$ a medida que $x \rightarrow \pi$, con x racional
es decir: $2^3, 2^{3.1}, 2^{3.14}, 2^{3.141}, 2^{3.1415}, 2^{3.14159}, \dots$

Estas potencias cumplen las 7 propiedades anteriores

Un teorema del cálculo avanzado establece que si una función continua es siempre creciente (o siempre decreciente), posee inversa. La inversa de la función exponencial se llama **función logarítmica**.

Las funciones exponenciales reales más importantes son las que tienen como base $a = 10$ y $a = e$

El número e , llamado constante de Neper, es considerado el número por excelencia del cálculo. Es irracional y su valor aproximado (truncado) es $e \approx 2,71828\ 18284\ 59045 \dots$

DEFINICIÓN Y CARACTERÍSTICAS

Sea a un número real positivo, y distinto de 1, la función que a cada número real x le hace corresponder la potencia a^x se llama función exponencial **de base a y exponente x** , es decir la aplicación

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow a^x \quad \forall a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

- Si $a = 1$, se define $1^x = 1$, para todo número real x (*f. constante*)
- Si $a < 0$ y x es irracional, entonces a^x no se define
p. ej. $(-2)^\pi$, $(-3)^{\sqrt{5}}$ no son números reales
- Las potencias de base real y exponente entero existen siempre, tanto si a es positivo como si es negativo: p. ej. $(\sqrt{7})^{-3}$, $(-\pi)^5$
- Si a es un número real negativo, no siempre está definida la potencia $a^{m/n}$; p. ej. $(-3)^{1/2}$ no es un número real, mientras que $(-5)^{2/3}$ sí es real.
- Su dominio es $\mathbb{R}$ pues siempre existe a^x
- Toma siempre valores positivos: $\exp_a(x) = a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
Es decir, su recorrido es $\text{Im } f = \mathbb{R}^+$ (la gráfica nunca corta al eje OX, una potencia de base positiva nunca toma un valor negativo)
- $f(0) = 1$ y $f(1) = a$, es decir, $a^0 = 1$ y $a^1 = a$, que gráficamente significa que pasa por los puntos $A(0,1)$ y $B(1,a)$
- Es estrictamente **creciente** si $a > 1$
- Es estrictamente **decreciente** si $0 < a < 1$
- Es continua
- Es biunívoca o biyectiva entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^+$

Gráfica de la función exponencial (se consideran dos casos)

