

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

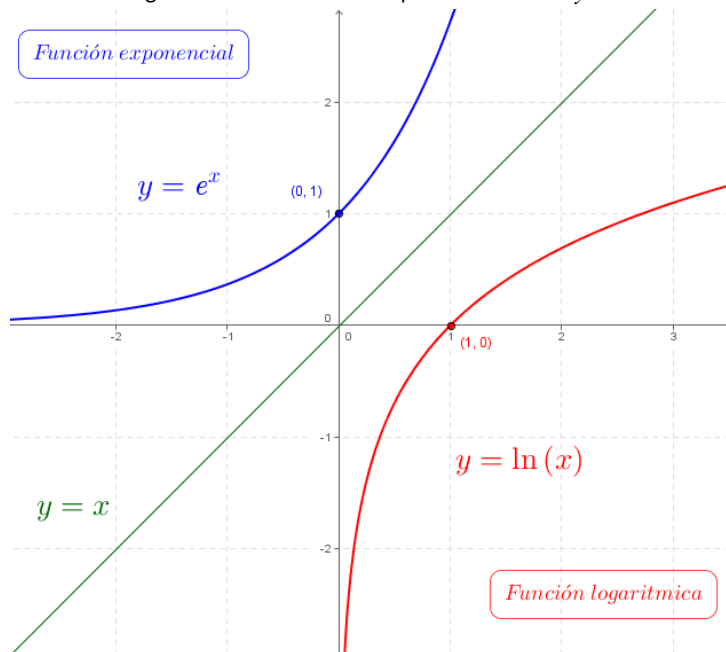
Toda función exponencial $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, es una función biunívoca y por tanto tiene función inversa. La función inversa f^{-1} se llama **función logarítmica** con base a y se escribe $\log_a$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\exp_a} \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\log_a} \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow a^x = y \longrightarrow \log_a y = x$$

Sus gráficas son simétricas respecto de la recta $y = x$



DEFINICIÓN

Sea a un número positivo y $a \neq 1$, la función logarítmica con base a , escrita $\log_a$, se define como

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Por lo tanto, $\log_a x$ es el exponente al cual se debe elevar la base a para obtener x

Consideraciones generales

- La función logarítmica es de la forma $f(x) = \log_a x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$
- El dominio de esta función son todos los números reales positivos, y el recorrido o imagen todos los números reales.

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty); \text{ Im } f = \mathbb{R}$$

- Si $a > 1$ entonces es monótona creciente.
- Si $0 < a < 1$ entonces es monótona decreciente.
- Es una función continua en todo $\mathbb{R}$
- Conviene indicar que: $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; $\log_a a^x = x$
- El eje Y es una asíntota vertical de la función $y = \log_a x$ porque $\log_a x \rightarrow \pm\infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$
- También es bueno volver a decir que los números negativos y el cero no tienen logaritmo dado que la función logarítmica sólo está definida sobre los números reales positivos.
- Y además, las bases más habituales son la base 10 (logaritmos decimales) y la base $e = 2,718281...$ (logaritmos neperianos).

Ejemplo:

$$y = f(x) = \log_2(3 - 5x)$$

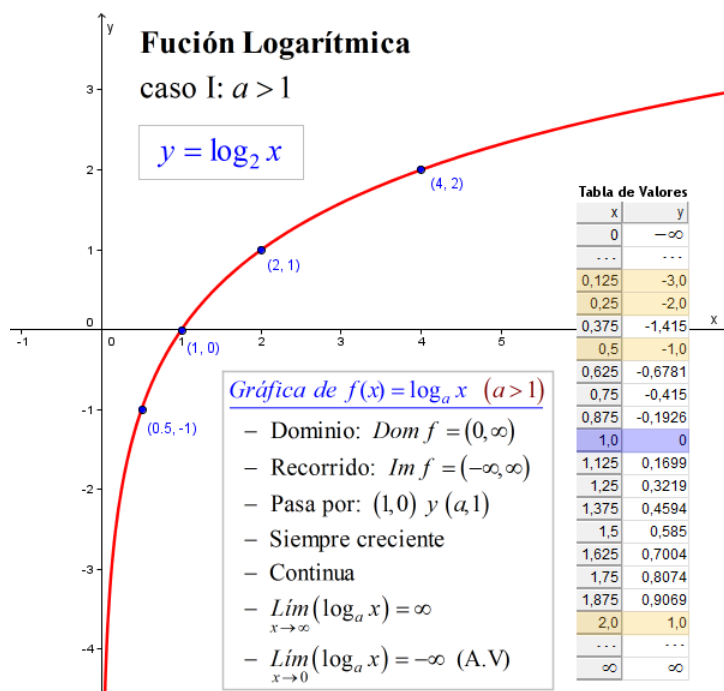
$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}; \text{ Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / \log_2(3 - 5x) \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / 3 - 5x > 0\}; \text{ Dom } f = \left(-\infty, \frac{3}{5}\right)$$

Representación Gráfica

Si $a > 1$ tenemos que:

- Los números menores que 1 tienen logaritmo negativo
- Los números mayores que 1 tienen logaritmo positivo

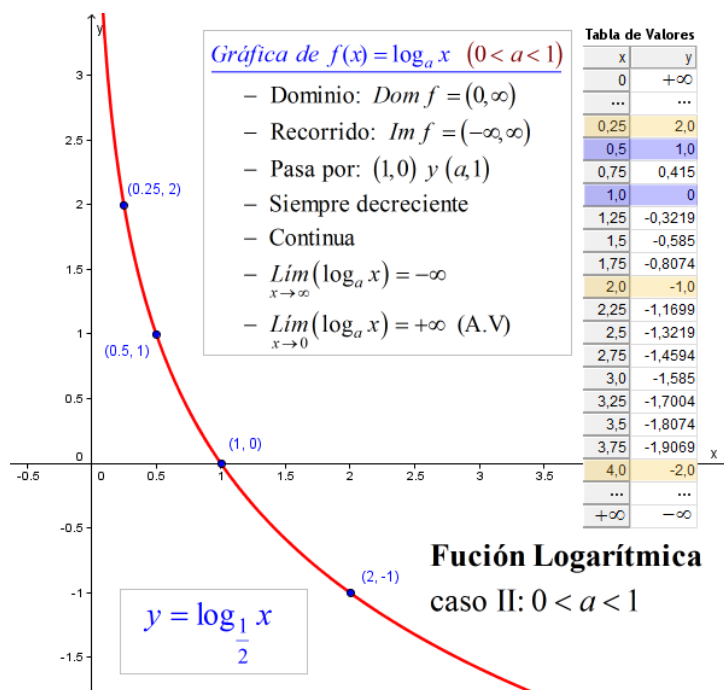


Gráfica de $f(x) = \log_a x$ ($a > 1$)

- Dominio: $\text{Dom } f = (0, \infty)$
- Recorrido: $\text{Im } f = (-\infty, \infty)$
- Pasa por: $(1, 0)$ y $(a, 1)$
- Siempre creciente
- Continua
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (\log_a x) = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\log_a x) = -\infty$ (A.V)

Si $0 < a < 1$ tenemos que:

- Los números menores que 1 tienen logaritmo positivo
- Los números mayores que 1 tienen logaritmo negativo



Gráfica de $f(x) = \log_a x$ ($0 < a < 1$)

- Dominio: $\text{Dom } f = (0, \infty)$
- Recorrido: $\text{Im } f = (-\infty, \infty)$
- Pasa por: $(1, 0)$ y $(a, 1)$
- Siempre decreciente
- Continua
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (\log_a x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\log_a x) = +\infty$ (A.V)

Utilizando las gráficas anteriores como básicas podemos **reflejar** (respecto al eje X o Y) gráficas de funciones logarítmicas como

$$a) g(x) = \log_2(-x) \quad b) h(x) = -\log_2 x$$

Y también podemos **desplazar** (hacia arriba/abajo o a derecha/izquierda) gráficas de funciones logarítmicas como las siguientes

$$a) g(x) = 3 + \log_2 x \quad b) h(x) = \log_2(x + 3)$$