

FUNCIONES

En la mayoría de los fenómenos físicos observamos que una cantidad depende de otra.

- La presión depende de la temperatura
- El área de un círculo depende del radio
- El precio de enviar por correo un paquete depende de su peso
- El número de bacterias en un cultivo depende del tiempo

Las funciones son las herramientas principales para la descripción matemática de una situación real. Todas las fórmulas de la Física no son más que funciones: expresan cómo ciertas magnitudes (por ejemplo el volumen de un gas) dependen de otras (la temperatura y la presión).

DEFINICIÓN:

Sean A y B dos conjuntos. Una función f es una regla que asocia a cada elemento x del conjunto A un único elemento, llamado $f(x)$, del conjunto B.

Vamos a ver funciones entre conjuntos de números reales, es decir, A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$; con frecuencia $B \subseteq \mathbb{R}$. Estas funciones se llaman *funciones reales de una variable real*.

Por tanto, para darnos una función nos deben decir, en principio, el subconjunto A de $\mathbb{R}$ donde suponemos que la función está definida y la regla que asigna a cada número de A un único número real. El conjunto A recibe el nombre de dominio de la función.

Para hablar de una función, es necesario darle un nombre. Las funciones se representan por letras. En la práctica las letras más usadas son f , g y h , pero cualquier letra es también válida.

Si f es una función y x es un número que está en su dominio, se representa por $f(x)$ (léase “ f de x ” o “el valor de f en x ”) el número que f asigna a x , que se llama imagen de x por f .

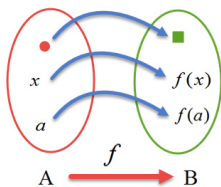
Es muy importante distinguir entre f (una función)
y $f(x)$ (un número real).

El símbolo $f: A \rightarrow \mathbb{R}$; $A \subseteq \mathbb{R}$ se utiliza para indicar que f es una función cuyo dominio es A (se supone, como hemos dicho antes, que A es un subconjunto de $\mathbb{R}$).

Es importante tener claro que las propiedades de una función dependen de la regla que la define y también de su dominio, por ello dos funciones que tienen distintos dominios se consideran distintas funciones aunque la regla que las defina sea la misma.

Resumiendo, tras la notación $f(x)$ hay 5 conceptos:

- 1) Un conjunto A
- 2) Un conjunto B
- 3) Una regla, criterio o ley f que asocia elementos de A con elementos de B
- 4) El elemento “ x ” del conjunto A
- 5) Un elemento del conjunto B concreto, el que la ley f asocia a “ x ” y que se escribe “ $f(x)$ ” (según indicó Euler en 1734)



Formas de describir una función

En general, una función se puede representar de cuatro maneras:

- Por medio de una tabla de valores (conjunto de pares ordenados).
- Utilizando una expresión verbal, es decir, describiendo la regla mediante una frase.

- Empleando una expresión algebraica, con una fórmula explícita.
- Mediante una gráfica representada en un sistema de coordenadas

Estas cuatro formas de representar una función son equivalentes, sin embargo no siempre es posible el paso de una a otra. Además, no todas las tablas, reglas, ecuaciones o gráficas representan una función.

Gráfica de una función

Las gráficas permiten obtener una representación visual de una función y nos aportan información que puede no ser tan evidente a partir de descripciones verbales o algebraicas.

Las gráficas son muy útiles para describir el comportamiento de $f(x)$ cuando x varía dentro de su dominio, obteniendo información rápidamente de ellas.

La gráfica de una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es el conjunto de pares de números $\{(x, f(x)): x \in A\}$ en un sistema de coordenadas.

La expresión $y = f(x)$ representa al conjunto de puntos del plano que satisfacen la función. En Física, se interpreta que x es la magnitud “independiente” y la y es la magnitud “dependiente”.

Es decir, para expresar que el número real x puede ser cualquiera, decimos que x es la **variable independiente**; y para expresar que el número real $f(x)$, que f asocia con x , es uno concreto decimos que $f(x)$ es la **variable dependiente**.

Debido a esto es frecuente, al trabajar con una función real, usar las letras “ x ” e “ y ” para representar las variables independiente (que se representa en el eje horizontal) y dependiente (que se representa en el eje vertical), respectivamente de modo que la gráfica de f coincide con la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

En la expresión anterior la letra f representa todas las operaciones que han de realizarse con cada valor de la variable independiente “ x ” para obtener el valor de la variable dependiente “ y ”.

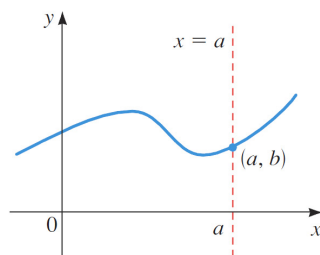
Método para obtener un esbozo de la gráfica de una función:

- Determinar los puntos de intersección con cada uno de los ejes.
- Escoger un grupo representativo de valores de x en el dominio de f y construir una tabla de valores.
- Representar los puntos $(x, f(x))$ de la tabla, en el sistema de coordenadas.
- Unir los puntos representados por medio de una curva suave.

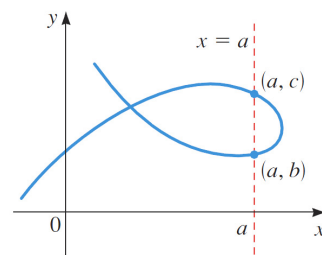
Si al trazar una recta paralela al eje OY sobre una curva, ésta corta a la curva en más de un punto, entonces la curva no representa una función porque una función no puede asignar más de un valor distinto a x .

CRITERIO DE LA VERTICAL:

Una curva en el plano de coordenadas es la gráfica de una función si y sólo si ninguna recta vertical cruza la curva más de una vez.



Gráfica de una función



No es la gráfica de una función

Dominio

Se llama **dominio** de definición, o campo de existencia de una función f , y se escribe $Dom f$, al conjunto de valores de x para los cuales existe la función.

$$Dom f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}$$

Es decir, es la colección de valores que toma la variable independiente y tienen imagen.

Unas veces el dominio de una función viene dado a priori, otras hay que calcularlo a partir de la definición de la función.

Dominio implícito o dominio natural de la función: cuando no se indica el dominio de f explícitamente, se entiende que el dominio es el mayor conjunto de valores de x para los cuales la expresión $f(x)$ tiene sentido como número real, es decir, será el máximo subconjunto de $\mathbb{R}$, donde la fórmula puede evaluarse (o dicho de otra forma, el dominio de definición es tan extenso como permitan las operaciones que componen su expresión analítica).

Dentro del conjunto de los números reales el dominio de una función puede quedar restringido por:

- Imposibilidad de realizar alguna operación. Esto ocurre si en la fórmula de f encontramos:
 - Denominadores:** Los valores que hacen cero el denominador no están en el dominio de definición.
 - Raíces:** No tienen soluciones reales las raíces de índice par de números negativos.
 - Logaritmos:** No están en el dominio los valores de x que hacen que la expresión logarítmica sea negativa o cero.
- Situación real de la que se ha extraído la función. El dominio debe tener sentido en el contexto considerado (es decir, puede estar restringido por las condiciones del problema).
- Voluntad de quien define la función. Podemos especificar un dominio concreto según criterios particulares (por ejemplo entornos de laboratorio).

Es usual llamar **dominio práctico** al conjunto de valores que puede tomar la variable independiente para que el problema específico tenga sentido.

Rango de una función:

Hemos dicho que una función f es una regla que asocia a cada elemento x del conjunto A un único elemento, llamado $f(x)$, del conjunto B .

Se llama **rango**, imagen o recorrido de una función, y se escribe $Im f$, a todos aquellos valores del conjunto B que la función f asocia a cada valor x de su dominio.

Igualdad de funciones

Dos funciones f y g son iguales cuando tienen igual dominio y $f(x) = g(x)$ para todo x en el dominio común.

Operaciones con funciones reales

Muchas funciones habituales pertenecen a la clase de las funciones elementales. Se llaman así porque pueden obtenerse a partir de ciertos tipos de funciones bien conocidas realizando las operaciones de suma, producto, cociente y composición de funciones.

Suma, producto y cociente de funciones. Dadas dos funciones $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$, se define su función *suma* (respectivamente *producto*) como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real $f(x) + g(x)$ (resp. $f(x)g(x)$). Dicha función se representa con el símbolo $f + g$ (resp. fg).

Se define la función *cociente* de f por g como la función que a cada número $x \in A$ con $g(x) \neq 0$ asigna el número real $\frac{f(x)}{g(x)}$. Dicha función

se representa por $\frac{f}{g}$. El producto de un número por una función puede considerarse un caso particular del producto de funciones.

Composición de funciones. Sea la función $h: A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$ se llama *composición* de g con f y se representa por $h = g \circ f$. Conviene indicar que la función $h = g \circ f$, solamente está definida cuando la imagen de f está contenida en el dominio de g . La composición de funciones es asociativa.

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$Dom(f + g) = Dom f \cap Dom g$
$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$Dom(f - g) = Dom f \cap Dom g$
$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$Dom(f \cdot g) = Dom f \cap Dom g$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$Dom\left(\frac{f}{g}\right) = (Dom f \cap Dom g) - \{x / g(x) = 0\}$
$(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$	$Dom(k \cdot f) = Dom f$
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$	$Dom(g \circ f) = Dom f \cap \{x / f(x) \in Dom g\}$

Simetrías

Para graficar funciones es útil tener en cuenta las posibles simetrías. Esto se determina estudiando si una función es par, impar o ninguna de las anteriores.

① Se dice que f es una función **par** si se verifica que $f(-x) = f(x)$, para todo x perteneciente al dominio de f .

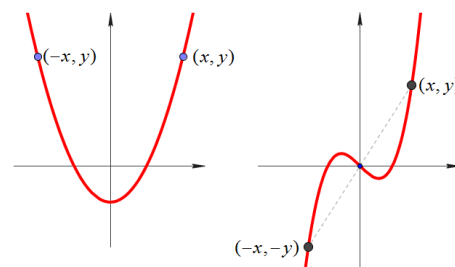
Observar que si una gráfica es par y (x, y) es un punto de la gráfica entonces $(-x, y)$ también está en la gráfica $\rightarrow$ la gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje Y .

② Se dice que f es una función **impar** si se verifica que $f(-x) = -f(x)$, para todo x perteneciente al dominio de f .

Además vemos que si f es impar y (x, y) es un punto de la gráfica de f entonces $(-x, -y)$ es también un punto de la gráfica $\rightarrow$ la gráfica de una función impar es simétrica respecto del origen de coordenadas.

Resumiendo, para comprobar la paridad de una función se evalúa f en $-x$. De ahí pasamos a determinar si se cumple ① o ② o ninguna de las anteriores.

La simetría es una característica importante de una gráfica y, además, nos puede ahorrar trabajo, pues con la mitad de la gráfica podemos obtener por simetría el resto.



Ejemplo.- determinar si es par, impar o ninguna de las anteriores

a) $f(x) = 3x^2 + 5$ b) $g(x) = 3x^3 - x$ c) $h(x) = 7x + 1$

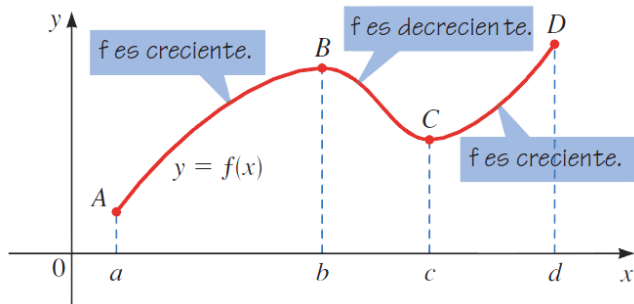
a) $f(-x) = 3(-x)^2 + 5 = 3x^2 + 5 = f(x)$, por tanto la función es par

b) $g(-x) = 3(-x)^3 - (-x) = -3x^3 + x = -(3x^3 - x) = -g(x)$, luego es impar

c) $h(-x) = 7(-x) + 1 = -7x + 1 \rightarrow$ que es distinto de $h(x)$ y de $-h(x)$ por tanto la función no es ni par ni impar

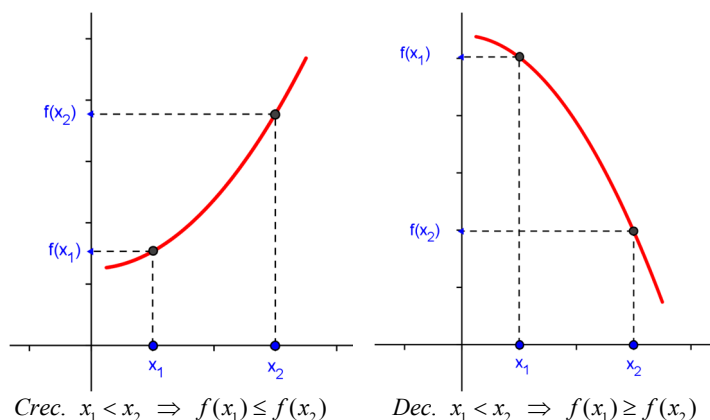
Funciones Crecientes y Decrecientes

Es muy útil saber dónde sube la gráfica de una función y donde baja.



Se dice que una función f es **creciente** en un intervalo I si $f(x_1) \leq f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I . Si cambiamos el signo $\leq$ por el de $<$, entonces hablamos de estrictamente creciente.

Se dice que una función f es **decreciente** en un intervalo I si $f(x_1) \geq f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I . Si cambiamos el signo $\geq$ por el de $>$, entonces hablamos de estrictamente decreciente.



Se dice que f es creciente (resp. decreciente) cuando lo es en todo su dominio de definición.

Se dice que una función es monótona para indicar que es creciente o decreciente.

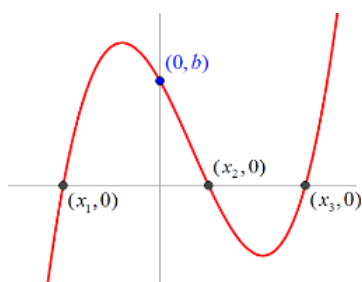
Una función monótona e inyectiva se dice que es estrictamente monótona, pudiendo ser estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Intersección con los ejes

Las intersecciones con los ejes es una característica que se tiene en cuenta en numerosas ocasiones.

- La intersección con el eje Y es el punto donde la gráfica de la función corta al eje Y. Para calcularlo hallamos el valor de la función en $x = 0$, es decir hallamos $f(0)$, dando un valor de $y = b$, conocido como ordenada en el origen.
- Las intersecciones con el eje X son los puntos donde la gráfica de f corta al eje X. Estos puntos son donde la coordenada y es 0. Para hallarlos resolvemos $f(x) = 0$ y despejamos x .

Ceros de una función.- Los ceros de una función son los valores de x que satisfacen la ecuación $f(x) = 0$



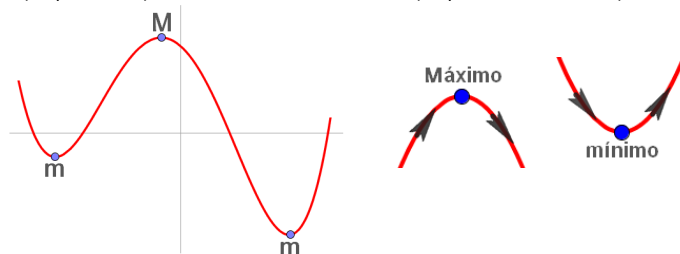
Máximo y mínimo de una función

MÁXIMO: se dice que la función $f(x)$ tiene un máximo en el punto x_1 , si su valor es aquí mayor que en cualquier otro punto x de un cierto intervalo que contiene al punto x_1 . Es decir, la función tiene un máximo en $x = x_1$ si $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ para todo valor de Δx (positivo o negativo) suficientemente pequeño en valor absoluto.

MÍNIMO: se dice que la función $f(x)$ tiene un mínimo para $x = x_2$ si $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ para cualquier valor de Δx (positivo o negativo) suficientemente pequeño en valor absoluto.

OBSERVACIONES:

- Una función definida en un intervalo cerrado alcanza su valor máximo o mínimo sólo en los puntos interiores del intervalo considerado.
- Sería un error suponer que el máximo y el mínimo de una función son, respectivamente, el mayor o menor valor de la misma en este intervalo. En el punto máximo, la función tiene el mayor valor sólo en comparación con los valores que ésta tiene en puntos suficientemente próximos al punto máximo. En el punto mínimo, la función tiene el menor valor sólo en comparación con los valores que ésta tiene en puntos suficientemente próximos al punto mínimo. Es por esto que a veces se habla de **máximo relativo** y **mínimo relativo**.
- Si ningún otro valor de la función es superior (resp. inferior) a un máximo (resp. mínimo) se habla de máximo **absoluto** (resp. mínimo **absoluto**).



Tasa de variación media (TVM)

Es una forma de ver el aumento o disminución de una función.

Se llama Tasa de Variación Media (TVM) de la función f en el intervalo $[a, b]$ al cociente entre la variación de la función y la longitud del intervalo.

$$TVM[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Es un promedio de la variación de la función. Geométricamente es la pendiente del segmento $\overline{AB}$. Cuando la TVM es positiva la función es creciente y viceversa.

