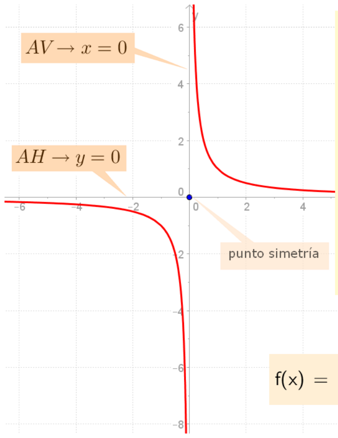
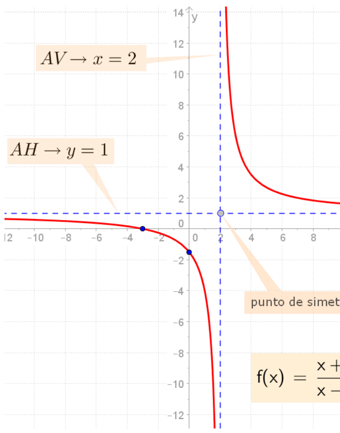
FUNCIONES RACIONALES

- Son funciones de la forma $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, *siendo* $P(x)$ *y* $Q(x)$ *dos polinomios y además* $Q(x)\neq 0$
- *Dominio*. Todos los números reales excepto aquellos que anulan el denominador $Dom\ f=\mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}\ /\ Q(x)=0\}$. Para buscar el dominio debemos resolver la ecuación asociada al denominador, las soluciones de ésta son los puntos que no pertenecen al dominio de la función.
- *Asíntotas*. Las funciones racionales pueden tener AV, AH o AO.
  En cada valor de x que anula el denominador tenemos una asíntota vertical: $Q(a)=0 \Rightarrow x=a$ *es una asíntota vertical de* $f(x)$
- *Puntos de cortes*. Con el eje X se hallan resolviendo la ecuación $P(x)=0$. El punto de corte con el eje Y se halla calculando $f(0)$
- *Continuidad*. Una función racional es discontinua en aquellos valores de x en los que el denominador se anula: $Q(x)=0$
- *Estudio del signo de la función*. Son los intervalos en los que $f(x)>0$ *ó* $f(x)<0$, resolvemos, para "los positivos", la inecuación asociada

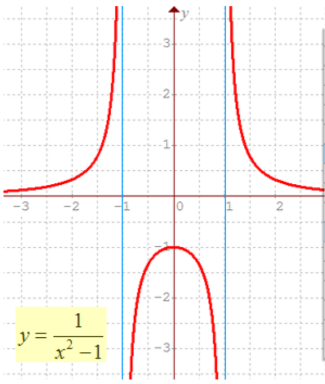
Tipo de Función	**Expresión algebraica y Clase de gráfica**	**Características y Observaciones**	**Representación gráfica y Tabla de valores**	**Algunos Ejemplos**
Función de **proporcionalidad inversa**	$\boxed{y=\dfrac{k}{x}}$ $\forall k\in\mathbb{R}\ ;\ k\neq 0$ $Dom\ f=\mathbb{R}-\{0\}$ $Im\ f=\mathbb{R}-\{0\}$ Su gráfica es una curva llamada **hipérbola** Presenta dos ramas, simétricas respecto del origen de coordenadas	Una función de proporcionalidad inversa relaciona dos magnitudes inversamente proporcionales. - No presenta puntos de corte con ejes - k es la constante de proporcionalidad - Es una función impar: $f(-x)=k/(-x)=-f(x)$ - AV en $x=0$. AH en $y=0$ - Sin puntos de corte con los ejes Si k > 0 la función es decreciente por intervalos. Gráfica en 1º y 3º cuadrante Si k < 0 la función es creciente por intervalos. Gráfica en 2º y 4º cuadrante Si |k| > 1 la gráfica se aleja del origen Si |k| < 1 la gráfica se acerca al origen	 *Las asíntotas son los ejes de coordenadas*	$y=\dfrac{3}{x}$ $y=-\dfrac{7}{x}$ ……
Función **homográfica** Cociente de dos funciones lineales (homográfica ≈ gráfica parecida)	$\boxed{y=\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ $\forall a,b,c,d\in\mathbb{R}$; $c\neq 0\to$ (no lineal) $ad\neq bc\to$ (no cte) $y=\dfrac{k}{x+m}+n$ $Dom\ f=\mathbb{R}-\{\text{AV}\}$ $Im\ f=\mathbb{R}-\{\text{AH}\}$ Su gráfica es una curva llamada **hipérbola**	Su gráfica presenta dos ramas en el 1º y 3º cuadrante o en el 2º y 4º cuadrante simétricas respecto al punto de corte de las asíntotas (centro de la hipérbola) Puntos de Corte con los ejes - eje X: resolviendo $ax+b=0$ (cero de la función: $\{-b/a\}$ - eje Y: calculando $f(0)$ AV: la recta $x=-\dfrac{d}{c}$ y AH: la recta $y=\dfrac{a}{c}$ - Crecientes o decrecientes por intervalos - Discontinuidad en $x=-d/c$ - El signo de la función se estudia resolviendo la inecuación $f(x)>0$		$y=\dfrac{3x+2}{x-2}$ $y=\dfrac{2x+6}{-x+2}$ $y=\dfrac{3}{x+2}+1$ ……

x	y
−7	−0.14
−6	−0.17
−5	−0.2
−4	−0.25
−3	−0.33
−2	−0.5
−1	−1
0	∞
1	1
2	0.5
3	0.33
4	0.25
5	0.2
6	0.17
7	0.14
8	0.13

x	y
−7	0.44
−6	0.38
−5	0.29
−4	0.17
−3	0
−2	−0.25
−1	−0.67
0	−1.5
1	−4
2	∞
3	6
4	3.5
5	2.67
6	2.25
7	2
8	1.83

Otras funciones racionales

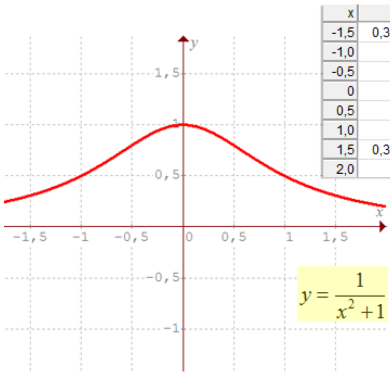
- A veces sus gráficas tienen varias ramas, estudiando el signo de la función sabemos dónde representarlas (resolviendo la inecuación $f(x)>0$).
- Encontramos asíntotas verticales en los puntos solución, o ceros, del polinomio denominador (puntos que no pertenecen al dominio de la función)
- En la tabla de valores aparece la palabra "error" donde la función no está definida (AV). En las gráficas se señalan las asíntotas verticales.



x	y
-3,5	0,0889
-3,0	0,125
-2,5	0,1905
-2,0	0,3333
-1,5	0,8
-1,0	Error
-0,5	-1,3333
0	-1,0
0,5	-1,3333
1,0	Error
1,5	0,8
2,0	0,3333
2,5	0,1905
3,0	0,125
3,5	0,0889
4,0	0,0667

$Dom\ f=\mathbb{R}-\{-1,+1\}$

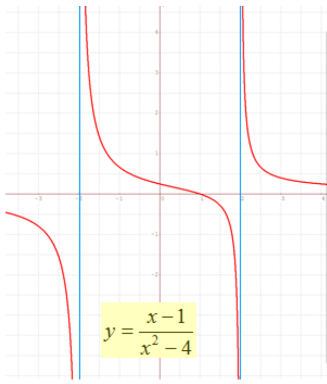
AV *en* $x=-1$ y $x=1$



x	y
-1,5	0,3077
-1,0	0,5
-0,5	0,8
0	1,0
0,5	0,8
1,0	0,5
1,5	0,3077
2,0	0,2

$Dom\ f=\mathbb{R}$

AH *en* $y=0$



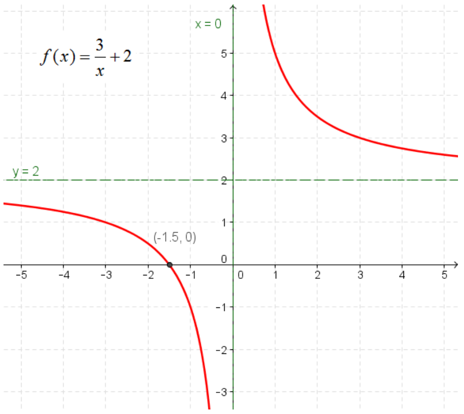
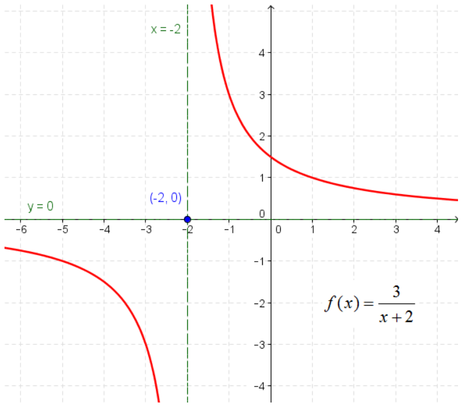
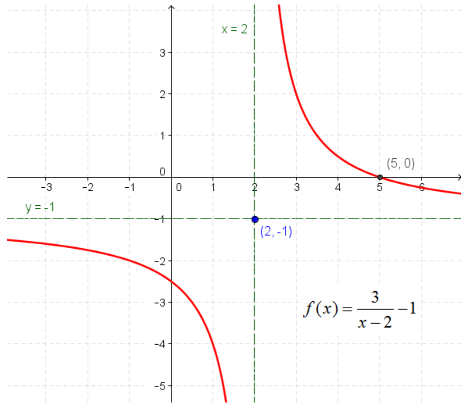
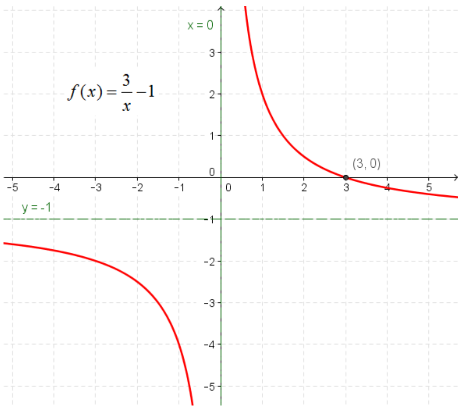
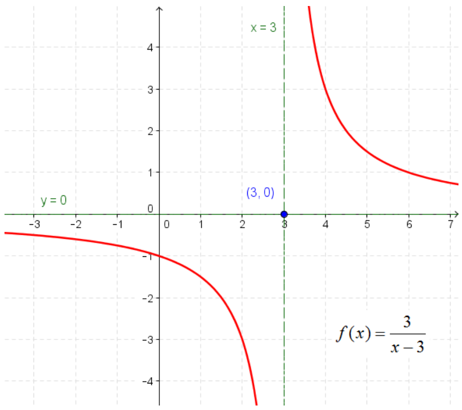
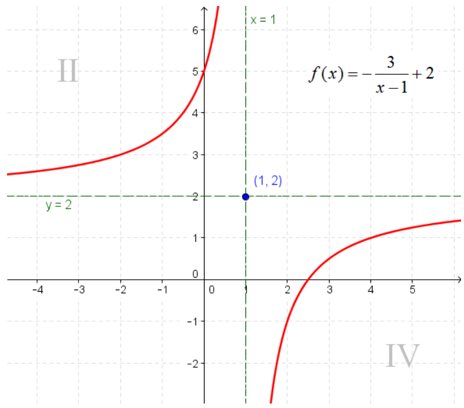
x	y
-7,0	-0,1778
-6,0	-0,2188
-5,0	-0,2857
-4,0	-0,4167
-3,0	-0,8
-2,0	Error
-1,0	0,6667
0	0,25
1,0	0
2,0	Error
3,0	0,4
4,0	0,25
5,0	0,1905
6,0	0,1563
7,0	0,1333
8,0	0,1167

$Dom\ f=\mathbb{R}-\{-2,+2\}$

AV *en* $x=-2$ y $x=2$

Traslación de hipérbolas

A partir de la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{k}{x}$ se pueden obtener otras por traslación, dividiendo convertimos la expresión $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ en esta otra $\dfrac{k}{x+m}+n$

Traslación Vertical: $f(x)=\dfrac{k}{x}+n$ El centro de la hipérbola es $(0,n)$	**Traslación Horizontal**: $f(x)=\dfrac{k}{x+m}$ El centro de la hipérbola es $(-m,0)$	**Traslación Oblicua**: $f(x)=\dfrac{k}{x+m}+n$ El centro de la hipérbola es $(-m,n)$
Si $n>0$, la función $f(x)=\dfrac{k}{x}$ se desplaza hacia arriba n unidades	Si $m>0$, la función $f(x)=\dfrac{k}{x}$ se desplaza hacia la izquierda m unidades	Su representación gráfica es una hipérbola de centro $(-m,n)$ y de asíntotas paralelas a los ejes
		
Si $n<0$, la función $f(x)=\dfrac{k}{x}$ se desplaza hacia abajo n unidades	Si $m<0$, la función $f(x)=\dfrac{k}{x}$ se desplaza hacia la derecha m unidades	Si $k<0$, la función $f(x)=\dfrac{k}{x+m}+n$ ocupa el II y IV cuadrante
		

__Observaciones__:

- Para estudiar *la monotonía* (intervalos en los que la función es creciente o decreciente) buscamos los máximos y mínimos relativos que tenga la función mediante la primera y segunda derivada. Una función pasa de creciente a decreciente en un máximo y viceversa en un mínimo
- Para estudiar *la curvatura* (intervalos de concavidad y convexidad) buscamos los puntos de inflexión mediante la segunda y tercera derivada. Una curva pasa de cóncava a convexa o viceversa al pasar por el punto de inflexión

ASÍNTOTAS: Cuando la gráfica de una función se acerca cada vez más a una recta, confundiéndose con ella, se dice que ésta es una **asíntota**.

- **Asíntotas verticales**: La recta $x=a$ es una asíntota vertical de la función cuando en un punto a, el valor de $f(x)$ tiende a valores cada vez más grandes $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ o a valores cada vez más pequeños $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$.
- **Asíntotas horizontales:** La recta $y=b$ es una asíntota horizontal de la función si se verifica que cuando $x\to+\infty$ ó $x\to-\infty$ el valor de la función tiende a un valor finito, esto es $\lim_{x\to\infty} f(x)=b$
- **Asíntotas Oblicuas**: Si el grado de $P(x)$ es una unidad mayor que el grado de $Q(x)$ existe una asíntota oblicua, la misma, tanto si $x\to+\infty$ ó $x\to-\infty$ y una forma de determinar su ecuación rápidamente es realizar la división polinómica indicada

  Siendo n y m los coeficientes respectivos de mayor grado de $P(x)$ y $Q(x)$ tenemos:
  - Si $P(x)$ y $Q(x)$ tienen el mismo grado, hay una asíntota horizontal en $y=n/m$
  - Si el grado de $P(x)$ es menor que el de $Q(x)$, hay una asíntota horizontal en $y=0$
  - Si el grado de $P(x)$ es mayor que el de $Q(x)$, no hay asíntota horizontal

- Una función racional puede tener más de una asíntota vertical, pero solo una que sea horizontal u oblicua (*si tiene asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua y viceversa)*.
- Si $x=a$ es una raíz simple de $Q(x)=0$ las ramas laterales de la asíntota tienen sentidos contrarios (una hacia $+\infty$ y la otra hacia $-\infty$). Si $x=a$ es una raíz doble ambas ramas van o hacia $+\infty$ o hacia $-\infty$