

LOGARITMOS

Los logaritmos fueron introducidos en las matemáticas con el propósito de facilitar, simplificar o hacer posible complicados cálculos numéricos. Utilizando logaritmos podemos convertir productos en sumas, cocientes en restas, potencias en productos y raíces en cocientes.

El método de cálculo mediante logaritmos aparece en el siglo XVII gracias a los trabajos independientes de Neper¹ y Bürgi². Los logaritmos se emplearon habitualmente en astronomía, geodesia, navegación marítima y demás ramas de la matemática aplicada.

Hasta la llegada de las calculadoras y los ordenadores los logaritmos fueron muy utilizados por científicos, ingenieros, ... para realizar operaciones más fácil y rápidamente, usando reglas de cálculo y tablas de logaritmos.

Para representar la operación de logaritmo en una determinada base se escribe la abreviatura $\log$, y como subíndice la base a , y seguidamente el número del que deseamos hallar el logaritmo. Cuando se sobreentiende la base, se puede omitir.

DEFINICIÓN

Se llama logaritmo en base a del número x al exponente b al que hay que elevar la base para obtener dicho número.

$$\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x$$

siendo $a > 0$ y $a \neq 1$; $x > 0$; $b \in \mathbb{R}$

Y se lee "logaritmo en base a de x "

- La constante a es un número real positivo distinto de 1 y se denomina base del sistema de logaritmos. Las bases más habituales son la base 10 (logaritmos decimales) y la base e (logaritmos neperianos).
- El número x debe ser un número positivo
- El exponente b puede ser cualquier número real

La operación de logaritmación ("extracción de logaritmos" o "tomar logaritmos") es siempre posible en el campo real cuando tanto la base " a " como el número " x " son positivos, es decir: **los números negativos y el cero no tienen logaritmos.**

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Como los logaritmos son exponentes, sus propiedades se corresponden con las de las potencias. Por ejemplo: en los productos los exponentes se suman, del mismo modo, el logaritmo de un producto de dos números es igual a la suma de los logaritmos de esos números y así con las demás propiedades.

• $\log_a 1 = 0$	1) $\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$
• $\log_a a = 1$	2) $\log_a \left(\frac{u}{v} \right) = \log_a u - \log_a v$
• $\log_a a^u = u$	3) $\log_a u^n = n \cdot \log_a u$
• $a^{\log_a u} = u$	4) $\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \cdot \log_a u$

$\log_a 0 \rightarrow$ No existe ; $\log_a (-n) \rightarrow$ No existe

Un logaritmo es un exponente, y solo eso

$$\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x$$

LOGARITMOS DECIMALES

Se llaman logaritmos decimales (o vulgares) a los logaritmos que tienen como base el número 10.

$$\log_{10} N \text{ o habitualmente escrito } \log N$$

Al ser muy habituales es frecuente no escribir la base

LOGARITMOS NEPERIANOS

Se llaman logaritmos neperianos (o naturales) a los logaritmos que tienen como base el número $e = 2.718281828459045235...$ Como en el caso anterior, como son muy utilizados en su notación no aparece la base:

$$\log_e A \text{ o habitualmente escrito } \ln A, \text{ Ln } A, \text{ L } A$$

(aunque en matemáticas superiores se escribe $\log$ y el decimal $\log_{10}$)

El nombre de "neperianos" dado a los logaritmos naturales se eligió con la intención de honrar la memoria de uno de los inventores del concepto de logaritmo: Neper, L. Euler propuso usar la letra e para este número irracional.

CAMBIO DE BASE

Podemos calcular el logaritmo en cualquier base utilizando la siguiente expresión:

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} ; \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

En la que b es cualquier base válida. Si hacemos $b = N$, obtenemos la segunda expresión.

ANTILOGARITMO

Es el problema inverso de tomar logaritmos. Es el número que corresponde a un logaritmo dado.

$$\log_a x = y \Leftrightarrow \text{Anti } \log_a y = x \Leftrightarrow a^y = x$$

P.ej. Si $\log_{10} N = 2,1673$, hallar N . Esta operación se llama calcular el antilogaritmo de 2,1673. Se opera así:

$$\log_{10} N = 2,1673 \Rightarrow N = 10^{2,1673} = 147$$

$$\text{también se escribe: } \text{Anti } \log_{10} 2,1673 = 147$$

Es decir, consiste en elevar la base al número resultado.

COLOGARITMO

El cologaritmo de un número N es el logaritmo de su inverso:

$$\text{colog } N = \log \frac{1}{N} = -\log N$$

EQUIVALENCIAS ÚTILES

$\log 2 = 0,3010$	$\ln 2 = 0,6931$	$\log N = 0,4343 \cdot \ln N$
$\log 3 = 0,4771$	$\ln 3 = 1,0986$	$\ln N = 2,3025 \cdot \log N$
$\log e = 0,4343$	$\ln 10 = 0,3025$	$\log 5 = \log \frac{10}{2} = 1 - \log 2$

⚠ Atención

$\log_a (x \pm y) \rightarrow$ No hay regla para el logaritmo de una suma o diferencia

$(\log_a x)^n = \underbrace{(\log_a x) \cdot (\log_a x) \cdot \dots \cdot (\log_a x)}_{n \text{ veces}} ; \text{ pero NO es } n \cdot \log_a x$

¹ John Napier (Neper) (1550-1617) matemático escocés, reconocido por ser el primero en definir los logaritmos. También hizo común el uso del punto decimal en las operaciones aritméticas.

² Joost Bürgi (1552-1632) matemático suizo, reconocido por ser junto con Neper el primero en definir los logaritmos. También contribuyó a una técnica rápida para calcular productos usando identidades trigonométricas.