NÚMEROS RACIONALES

El resultado de sumar, restar y multiplicar dos números enteros es siempre un número entero. En cambio, al dividir dos números enteros unas veces el resultado es un número entero:

$$p.ej.\ \ 14:7=2 \ \ ; \ \ 2\in\mathbb{Z}$$

y otras veces el resultado no es un número entero:

$$p.ej.\ \ 17:5=3{,}4 \ \ ; \ \ 3{,}4\notin\mathbb{Z}$$

Necesitamos, por tanto, un conjunto mayor de números donde podamos realizar siempre la división (excepto por cero). Este conjunto se denomina conjunto de los números racionales y se simboliza con la letra $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\,|\,a,b\in\mathbb{Z}\ \ y\ \ b\neq 0\right\}$$

Algunos ejemplos de números racionales son:

$$\frac{1}{2};\frac{-3}{5};\frac{2}{7};\frac{-15}{5};\frac{5}{4};\frac{14}{2};\frac{4}{-9};\frac{30}{6};-\frac{1}{7};\frac{17}{5};\ldots$$

Observamos que hay números racionales que son enteros, señalados en rojo en el ejemplo. A los que no son enteros se les llama “números fraccionarios”.

TIPOS DE NÚMEROS RACIONALES

– Los números enteros: $\mathbb{Z}=\{\ldots-,3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$

El conjunto de los números enteros está formado por el conjunto de los números naturales: $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ o *enteros positivos*, el cero y los denominados *enteros negativos*: $\mathbb{Z}^-=\{\ldots-,3,-2,-1\}$

Todos estos números son racionales porque los podemos expresar en forma de fracción $n/1$

$$p.ej.\ \ 5=\frac{5}{1}\ ;\ -8=\frac{-8}{1}\ ;\ -3=\frac{-15}{5}\ ;\ 2=\frac{14}{7}$$

– Los números racionales no enteros:

Son todas las fracciones que **no** dan lugar a números enteros.

$$p.ej.\ \ \frac{7}{2};-\frac{19}{10};\frac{11}{7};\frac{47}{6};\frac{-40}{22};\frac{25}{30};\ldots$$

Al calcular su expresión decimal siempre obtenemos un número decimal exacto o periódico.

Por tanto se verifica que: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$

Una **fracción** es el cociente indicado de dos números enteros, a/b, donde **a** se llama *numerador* y **b** es el *denominador* y siempre el denominador debe ser diferente de cero.

$$Fracción:\ \frac{a\ \to numerador}{b\ \to denominador}\ \ ;\ \ b\neq 0$$

Para medir suele ser necesario fraccionar la unidad, y de aquí surge la idea de número fraccionario: la mitad, la quinta parte,...

- **Fracción**: relación entre una parte de un total y el respectivo total
- **Todo**: número de partes en que se divide la unidad (total)
- **Parte**: número de partes que se consideran

$$\frac{3\ \to parte}{7\ \to todo}\ \left\{\begin{array}{l}\text{la unidad se ha dividido en 7 partes}\\ \text{iguales de las que se consideran 3}\end{array}\right\}$$

En los problemas se distinguen así: $\dfrac{PARTE\ \to es,\ son,\ldots}{TODO\ \to de,\ del,\ldots}$

Las palabras “*de*”, “*del*”, “*de los*”,... significan multiplicación en los problemas

- Numerador: *representa las partes de la unidad que se toman o consideran*
- Denominador: *indica las partes iguales en que se divide la unidad o el todo*

Conceptos teóricos

- FRACCIONES HOMOGÉNEAS
  Tienen igual denominador
  $$p.ej.\ \ \frac{7}{4},\frac{19}{4},\frac{5}{4},\ldots$$
- FRACCIONES HETEROGÉNEAS
  Tienen diferente denominador
  $$p.ej.\ \ \frac{4}{3},\frac{11}{7},\frac{13}{4},\ldots$$
- FRACCIÓN PROPIA
  El numerador es menor que el denominador
  $$p.ej.\ \ \frac{7}{11},\frac{19}{47},\frac{3}{5},\ldots$$
- FRACCIÓN IMPROPIA
  El numerador es mayor que el denominador
  $$p.ej.\ \ \frac{8}{5},\frac{17}{4},\frac{9}{2},\ldots$$
- NÚMERO MIXTO
  Es un número entero más una fracción
  $$p.ej.\ \ 3+\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}=\frac{7}{2}\ ,\ 1+\frac{3}{5}=1\frac{3}{5}=\frac{8}{5},\ldots$$
- FRACCIÓN IRREDUCIBLE
  Numerador y denominador son primos entre sí
  $$p.ej.\ \ \frac{24}{11},\frac{7}{4},\frac{13}{15},\ldots$$
- FRACCIÓN DECIMAL
  El denominador es una potencia de 10
  $$p.ej.\ \ \frac{7}{10},\frac{41}{1000},\frac{83}{100},\ldots$$
- FRACCIÓN ORDINARIA
  El denominador *no* es una potencia de 10
  $$p.ej.\ \ \frac{11}{5},\frac{20}{3},\frac{41}{22},\ldots$$
- ENTERO RACIONAL
  El numerador es múltiplo del denominador
  $$p.ej.\ \ \frac{-15}{5},\frac{14}{2},\frac{30}{6},\ldots$$
- FRACCIONES EQUIVALENTES
  Se representan de forma diferente pero tienen el mismo valor, es decir, tienen la misma expresión decimal. Los productos cruzados valen lo mismo.
  $$\frac{a}{b}\approx\frac{c}{d}\ \Rightarrow\ a\cdot d=b\cdot c$$
  $$p.ej.\ \ \frac{3}{5}\approx\frac{15}{25}\approx\frac{30}{50}\approx\frac{90}{150},\ldots$$
  comprobamos que $\frac{3}{5}$ y $\frac{30}{50}$ son equivalentes
  porque se verifica el producto cruzado:
  $3\cdot 50=5\cdot 30\ \to\ 150=150$

Se puede formar una fracción equivalente a esta: $\dfrac{a}{b}$ multiplicando o dividiendo a y b por un mismo número. En el segundo caso diremos que hemos simplificado o reducido la fracción.

$$p.ej.\ \ \frac{-84}{126}=\frac{-42}{63}=\frac{-14}{21}=\frac{-2}{3}$$

Operaciones con números racionales

SUMA Y RESTA

La suma o resta de fracciones es otra fracción, observándose dos casos:

a) Con el mismo denominador

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$$

b) Con distinto denominador

- Se transforman en otras equivalentes con el mismo denominador (que es el mcm de los denominadores)
- El denominador común se divide entre cada denominador y se multiplica por el numerador correspondiente
- Se suman (o restan) los numeradores de las fracciones equivalentes obtenidas

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$$

Fracción Opuesta: se obtiene cambiando de signo a la fracción dada (al numerador o al denominador)

$$\textit{La fracción opuesta de } \frac{a}{b} \textit{ es } -\frac{a}{b}$$

MULTIPLICACIÓN

El producto de dos fracciones es otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

DIVISIÓN

El cociente de dos fracciones es otra fracción que tiene por numerador el producto de los extremos y por denominador el producto de los medios

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Fracción Inversa: se obtiene intercambiando numerador y denominador. Todo número racional, excepto el 0, tiene un inverso

$$\textit{La fracción inversa de } \frac{a}{b} \textit{ es } \frac{b}{a} \textit{ de modo que } \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

La división de dos fracciones es la multiplicación de la primera por la inversa de la segunda.

POTENCIACIÓN

Podemos aplicar las propiedades de las potencias para números enteros y además:

$$\forall\ m,n \in \mathbb{Z} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$b \neq 0 \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^0 = 1 \,;\, a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Operaciones compuestas

El cálculo con números racionales sigue las mismas reglas que con los números enteros:

- Primero los paréntesis, empezando por los internos.
- Después potencias y raíces
- Seguidamente multiplicaciones y divisiones
- Y por último, sumas y restas

Simplificar fracciones

Si el numerador y el denominador de una fracción se pueden dividir por un mismo número, al hacerlo diremos que hemos simplificado la fracción. Cuando una fracción no se puede simplificar más decimos que es una *fracción irreducible* (numerador y el denominador son primos entre sí).

Para simplificar una fracción y obtener su fracción irreducible, en un solo paso, dividimos numerador y denominador por el MCD de ambos números.

Comparar fracciones

Si dos fracciones tienen el mismo denominador será mayor la que tenga el numerador mayor. Si no tienen el mismo denominador buscamos fracciones equivalentes a ellas que tengan el mismo denominador (preferiblemente el mínimo común múltiplo de ellos).

$$\frac{a}{p} > \frac{b}{q} \Rightarrow a \cdot q - b \cdot p > 0$$

La fracción como operador

- Lo que corresponde a una fracción $\frac{a}{b}$ de una cantidad C es la parte P, es decir: $\frac{a}{b} \cdot C = P$
- Si conocemos la parte P que corresponde a la fracción $\frac{a}{b}$ de una cantidad C, esta se obtiene así: $C = P \cdot \frac{b}{a}$
- Las distintas partes (fracciones) de un todo suman 1.
- Para hallar una parte $\frac{a}{b}$ de otra parte $\frac{n}{m}$ de una cantidad C calculamos: $\frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m} \cdot C$

Pasar de Fracción a Decimal

Un número racional puede ser escrito como número decimal finito o como número decimal periódico. Al calcular el cociente m/n de dos enteros se puede obtener un número:

Entero: Cuando el numerador es múltiplo del denominador

$$p.ej.\ \frac{132}{11} = 12 \ ; \ \frac{56}{7} = 8 \ ;\ldots$$

Decimal Exacto: Tiene un número finito (limitado) de cifras decimales. Cuando en una fracción irreducible los factores primos del denominador sólo son el 2, el 5 o el 2 y el 5.

$$p.ej.\ \frac{41}{8} = 5{,}125 \ ; \ \frac{17}{25} = 0{,}68 \ ; \ \frac{97}{100} = 0{,}97 \ ;\ldots$$

Periódico: el periodo de un decimal infinito se denota poniendo una vez el periodo con una raya o un arco sobre él.

- **Puro**: Tiene infinitas cifras decimales periódicas. Un grupo de cifras se repite inmediatamente después de la coma. En el denominador hay otros factores *que no son* el 2 o el 5.

$$p.ej.\ \frac{11}{3} = 3{,}\overset{\frown}{6} \ ; \ \frac{71}{33} = 2{,}\overset{\frown}{15} \ ;\ldots$$

- **Mixto**: Tiene infinitas cifras decimales periódicas, pero tiene algunas cifras decimales que no se repiten después de la coma. En el denominador aparecen como factores el 2 o el 5, o el 2 y el 5, y además otros factores.

$$p.ej.\ \frac{7}{6} = 1{,}1\overset{\frown}{6} \ ; \ \frac{97}{18} = 5{,}3\overset{\frown}{8} \ ;\ldots$$