TRIGONOMETRÍA - DEFINICIONES

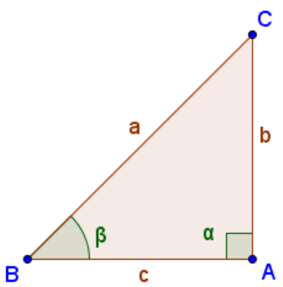
La palabra trigonometría es de origen griego: *trigono=triángulo* y *metron=medida*; trigonometría=*medida de los triángulos*.

Originariamente la trigonometría estudia las relaciones que existen entre los seis elementos de un triángulo (tres lados y tres ángulos). Cuando conocemos tres de ellos, con tal que uno sea un lado, la trigonometría enseña a solucionar el triángulo.

Además de en geometría, la trigonometría se utiliza en navegación, aeronáutica, agrimensura, astronomía, topografía, movimiento ondulatorio, vibraciones, sonido, termodinámica, corriente eléctrica, investigación atómica, etc…

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

Sabemos que dos triángulos rectángulos con un mismo ángulo agudo β en el vértice B son semejantes; por tanto, las razones entre los lados de uno cualquiera de ellos son las mismas que existen entre los lados homólogos en el otro. En cambio, dichas razones varían al variar el ángulo.
Podemos, pues, decir que las referidas razones son funciones del ángulo β y reciben los siguientes nombres y notaciones:



$$\operatorname{sen}\beta=\frac{cateto\ \ opuesto}{hipotenusa}=\frac{CA}{BC}=\frac{b}{a}$$

$$\cos\beta=\frac{cateto\ \ adyacente}{hipotenusa}=\frac{BA}{BC}=\frac{c}{a}$$

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{cateto\ \ opuesto}{cateto\ \ adyacente}=\frac{CA}{BA}=\frac{b}{c}$$

De la misma forma se definen las razones inversas siguientes:

$$\sec\beta=\frac{1}{\cos\beta}=\frac{a}{c}\ ;\ \operatorname{cosec}\beta=\frac{1}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{a}{b}\ ;\ \operatorname{cotg}\beta=\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{c}{b}$$

Los símbolos *sen*, *cos*, *tg (tan)*, se leen respectivamente *seno*, *coseno* y *tangente*; los símbolos *sec*, *cosec (csc)* y *cotg (cot)* se leen *secante*, *cosecante* y *cotangente*.

OBSERVACIONES:

- Las razones trigonométricas dependen del ángulo, pero no del triángulo.
- Como la hipotenusa es siempre mayor que cualquiera de los catetos, las razones seno y coseno son siempre menores que uno.
- Se llama razón entre dos números a su cociente.

RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN MISMO ÁNGULO

[Partiendo del T. Pitágoras] [dividimos la expresión por a^2] [Sustituimos por sus valores]

$$a^2=b^2+c^2\ \rightarrow\ \frac{a^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}\ \rightarrow\ 1=(\operatorname{sen}\beta)^2+(\cos\beta)^2$$

Que escribimos de manera más simple así:

FÓRMULA FUNDAMENTAL DE LA TRIGONOMETRÍA: $\boxed{\operatorname{sen}^2\beta+\cos^2\beta=1}$

[Dividiendo seno y coseno] [Obtenemos]

$$\frac{b/a}{c/a}\ \rightarrow\ \frac{b\cdot\cancel{a}}{\cancel{a}\cdot c}\ \rightarrow\ \boxed{\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}$$

Estas dos relaciones entre las tres funciones, seno, coseno y tangente de un mismo ángulo, permiten calcular dos de ellas conocida la tercera, y por extensión las de sus inversas.
Si conocemos el $\cos\beta$ tenemos:

$$\operatorname{sen}\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}\ \ ;\ \ \operatorname{tg}\beta=\frac{\sqrt{1-\cos^2\beta}}{\cos\beta}$$

Análogamente, si se conoce el $\operatorname{sen}\beta$ tenemos:

$$\cos\beta=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\beta}\ \ ;\ \ \operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{sen}\beta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\beta}}$$

Si es la $\operatorname{tg}\beta$, dividimos la fórmula fundamental por $\cos^2\beta$

$$\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{\cos^2\beta}+\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\beta}=\frac{1}{\cos^2\beta}\ \rightarrow\ \boxed{\operatorname{tg}^2\beta+1=\sec^2\beta}$$

Y dividiendo la fórmula fundamental por $\operatorname{sen}^2\beta$

$$\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{\operatorname{sen}^2\beta}+\frac{\cos^2\beta}{\operatorname{sen}^2\beta}=\frac{1}{\operatorname{sen}^2\beta}\ \rightarrow\ \boxed{1+\operatorname{cotg}^2\beta=\operatorname{cosec}^2\beta}$$

OBSERVACIONES:

$$\boxed{y=arc\operatorname{sen}x\ \Leftrightarrow\ x=\operatorname{sen}y}$$

En la calculadora $\operatorname{sen}^{-1}x=arc\operatorname{sen}x$ $(no\ \ es\ \ la\ \ \operatorname{cosec}x)$

$p.ej.:\ \operatorname{sen}30^\circ=0,5\ \rightarrow\ arc\operatorname{sen}0,5=30^\circ$

Tecleando: $\boxed{\operatorname{sen}^{-1}}$ $0,5$ obtenemos 30°

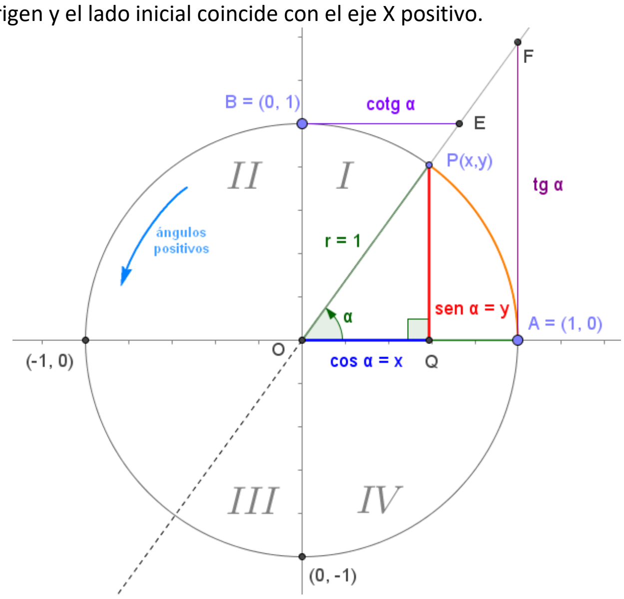
Tecleando: $\left(\boxed{\operatorname{sen}}\,30\right)\boxed{x^{-1}}$ obtenemos 2 $(que\ \ es\ \ la\ \ \operatorname{cosec}30^\circ)$

$\operatorname{sen}^2\alpha=(\operatorname{sen}\alpha)^2=\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha$, pero $\operatorname{sen}^2\alpha\neq\operatorname{sen}\alpha^2$

$\operatorname{sen}2\neq\operatorname{sen}2^\circ$ $(el\ \ primero\ \ se\ \ refiere\ \ a\ \ 2\ \ radianes)$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE CUALQUIER ÁNGULO

Sobre un sistema de coordenadas rectangulares trazamos una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio la unidad, llamada circunferencia goniométrica o trigonométrica.
Los ejes de coordenadas delimitan cuatro cuadrantes que se nombran utilizando números romanos en sentido contrario a las agujas del reloj.
Un ángulo está en posición **estándar** cuando el vértice está colocado en el origen y el lado inicial coincide con el eje X positivo.



Definición de las funciones trigonométricas en términos de un círculo unitario, siendo α un ángulo en posición estándar

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{y}{r}\quad\cos\alpha=\frac{x}{r}\quad\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\quad\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}\quad\operatorname{cotg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

x: abscisa, y: ordenada, r: radio ; $\forall\ \ x\neq0,\ y\neq0$ del denominador

regla mnemotécnica: **S**OR **C**AR **T**OA