CIRCUNFERENCIA

Como lugar geométrico

Se llama **circunferencia** al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado **centro**.
Se llama **radio** de la circunferencia a la distancia de cualquier punto de la circunferencia al centro.

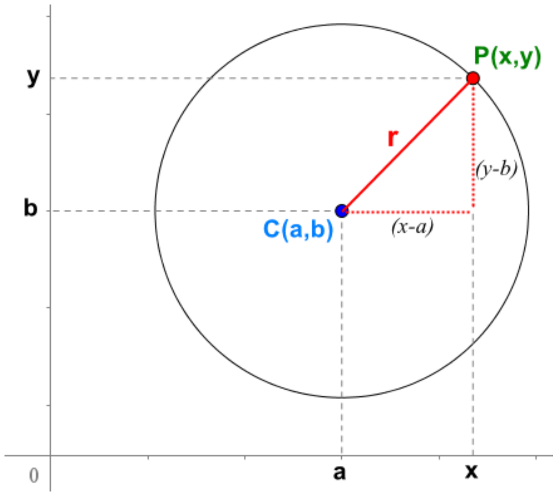
Sea una circunferencia de centro $C(a,b)$ y radio r, si $P(x,y)$ es un punto cualquiera de la circunferencia, entonces se verifica que:

$d(P,C)=r$, es decir:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \quad \to \quad \boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$$

Ecuación estándar de la circunferencia
(ecuación de la circunferencia en función de C y r)

centro (a,b) ; radio r



Efectuando las operaciones indicadas y ordenando, se obtiene:

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

Observamos que se trata de un polinomio de segundo grado donde los coeficientes de x^2 e y^2 son "1" y no tiene término xy.

Si hacemos:

$$\begin{array}{c|c|c} A=-2a & B=-2b & C=a^2+b^2-r^2 \\ a=-\frac{A}{2} & b=-\frac{B}{2} & r^2=\left(-\frac{A}{2}\right)^2+\left(-\frac{B}{2}\right)^2-C \end{array}$$

Queda:

$$\boxed{x^2+y^2+Ax+By+C=0}$$

Ecuación General de la Circunferencia

$$\text{centro } \left(-\tfrac{A}{2},-\tfrac{B}{2}\right) \;;\; \text{radio } \sqrt{\left(\tfrac{A}{2}\right)^2+\left(\tfrac{B}{2}\right)^2-C}$$

Si el centro de la circunferencia coincide con el origen de coordenadas, entonces $a=0$ y $b=0$, convirtiéndose en:

$$\boxed{x^2+y^2=r^2}$$

Ecuación reducida de la Circunferencia
(ecuación de la circunferencia con centro en el origen)

centro $(0,0)$; radio r

Conclusiones

Si tenemos una expresión de segundo grado en x e y del tipo

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

Y queremos saber si es una circunferencia y, si lo es, hallar su centro y su radio:

1. Observamos que los coeficientes de x^2 e y^2 son 1.
   Si tuvieran ambos un mismo coeficiente, distinto de 1, dividiríamos por él todos los términos.
2. Prestamos atención a que no aparezca término en xy
3. Comprobamos que: $\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{2}\right)^2-C>0$, en tal caso es una circunferencia:

Con **centro** en: $\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$; y su **radio** es: $\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{2}\right)^2-C}$

Determinación de una circunferencia

Hemos visto que la ecuación de una circunferencia se puede escribir de dos formas (según convenga)

1ª. $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
2ª. $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

Cada una de ellas depende de tres parámetros

la 1ª de a, b y r
la 2ª de A, B y C

Por tanto, necesitamos conocer ciertas condiciones para determinar estos tres parámetros.

Casos
- I. Conocer el centro y el radio
- II. Conocer un punto y el centro
- III. Conocer los extremos de un diámetro
- IV. Conocer el centro y una recta tangente
- V. Conocer tres puntos no alineados

Posiciones relativas de una recta y de una circunferencia

Una recta r, y una circunferencia c pueden ser exteriores, tangentes o secantes. Analíticamente podemos saber su posición de dos formas:

a) Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, que tendrá dos soluciones (se cortan, son secantes), una (son tangentes) o ninguna (son exteriores).
b) Comparando la distancia del centro a la recta con el radio, de manera que si es mayor, son exteriores; si es igual, son tangentes y si es menor son secantes (si fuera cero, la recta pasa por el centro)